Aardse Stellingen met hemelse bewijzen en Stellingen om van te smullen met (on)verteerbare bewijzen

Zaterdag 16 februari 2019

Deze presentatie is gegroeid uit mijn jaarlijkse les over Redeneren, Abstraheren en Structureren

Daaruit, volgend fragment:

Redeneren

Bewijs: ideale plaats om "schoonheid in de wiskunde" te demonstreren.

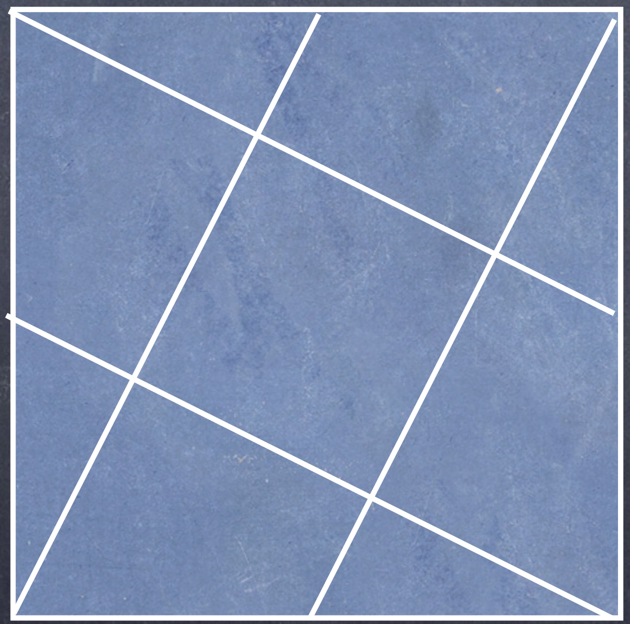
Waar zit die schoonheid?

* onverwachte (bvb een link)
* symmetrie
* eenvoud (hoe technischer, hoe minder mooi)
* synthetische (hoe minder rekenen, hoe mooier)
* opeenvolging van korte argumentjes (tic-tac-voetbal)

Redeneren

Voorbeeld: wat is de diameter van de ingeschreven cirkel van een driehoek met zijden 3,4,5?

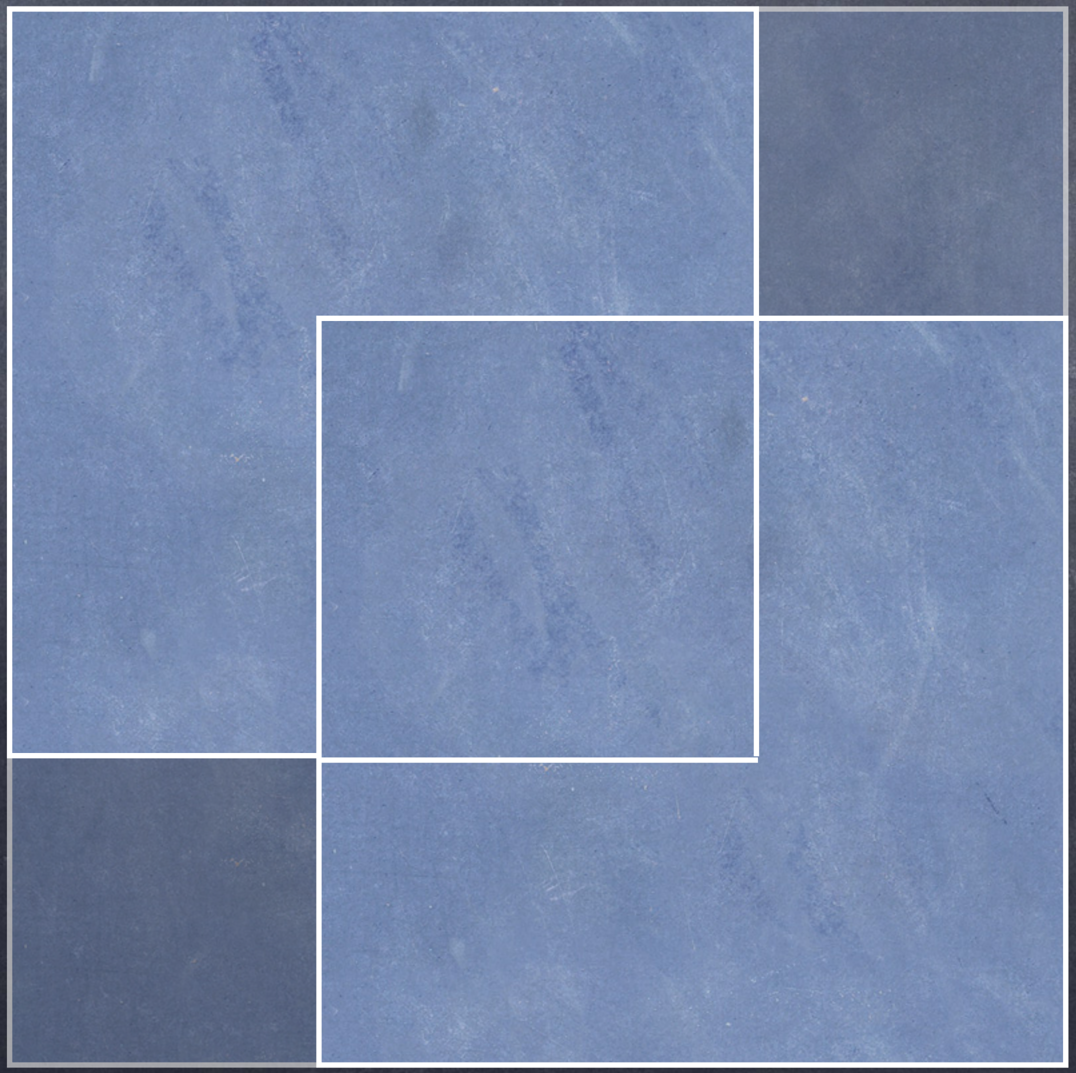
Voorbeeld: Wat is de oppervlakte van het kleine vierkant:



Opgave: Wat is mooiste bewijs in secundair onderwijs?

Redeneren

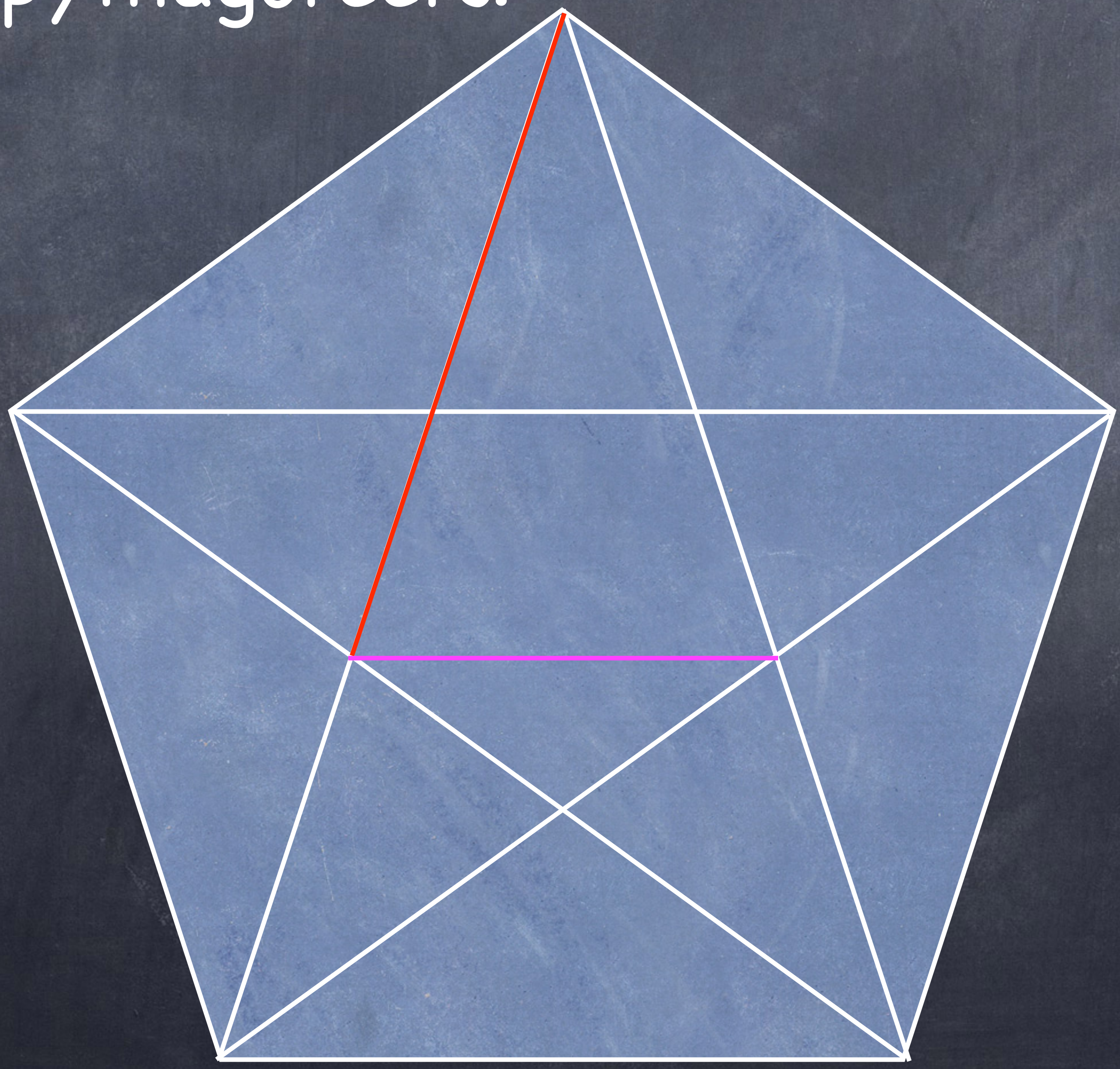
Extra voorbeeld: bewijs dat $\sqrt{2}$ irrationaal is
(volgens Stanley Tennenbaum)



Redeneren

Tweede extra voorbeeld: het eerste irrationale getal zou wel eens het gulden getal kunnen geweest zijn dank zij ... de pythagoreeërs.

$$\frac{\text{diagonaal}}{\text{zijde}}$$

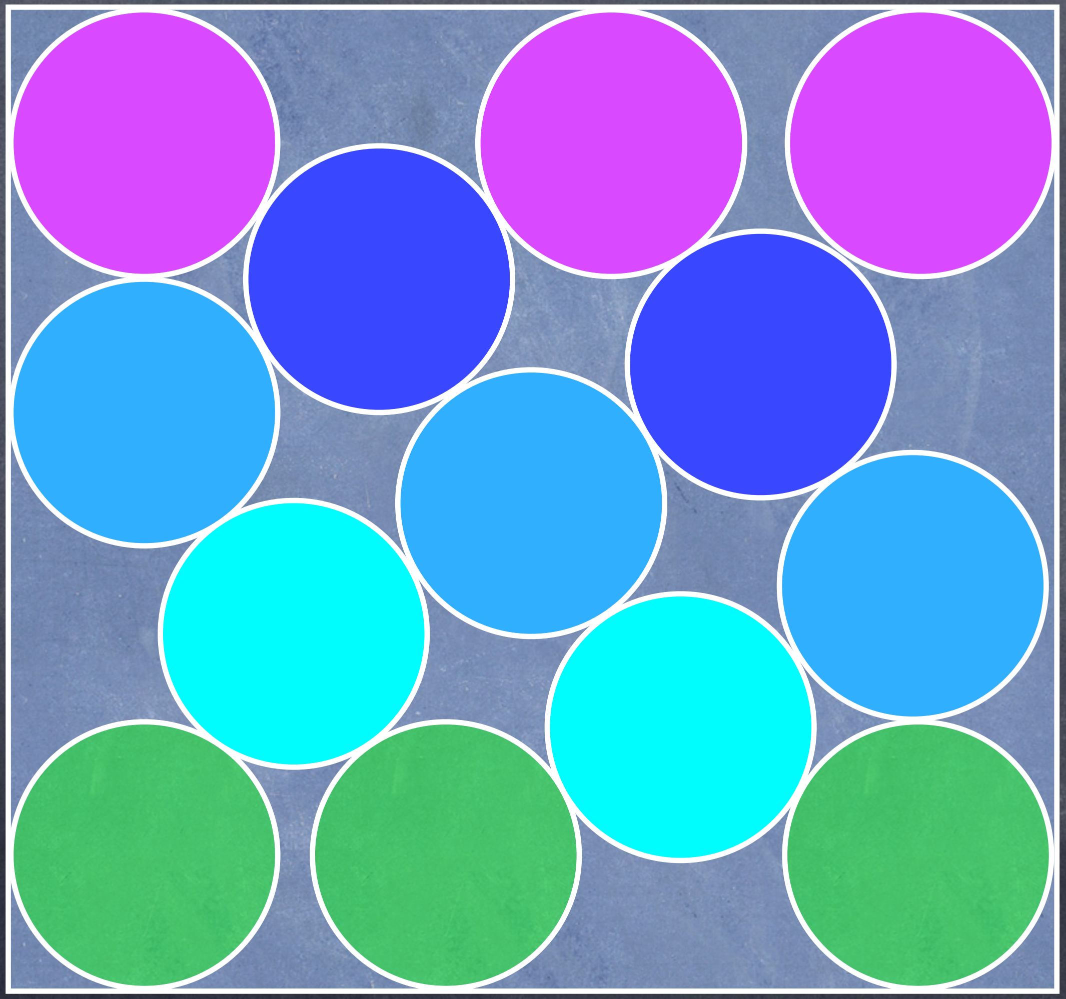


Redeneren

Ook sommige opgaven — stellingen dus — kunnen buitengewoon prachtig zijn!

Zes voorbeelden — eventueel als onderzoeks-opdracht te gebruiken

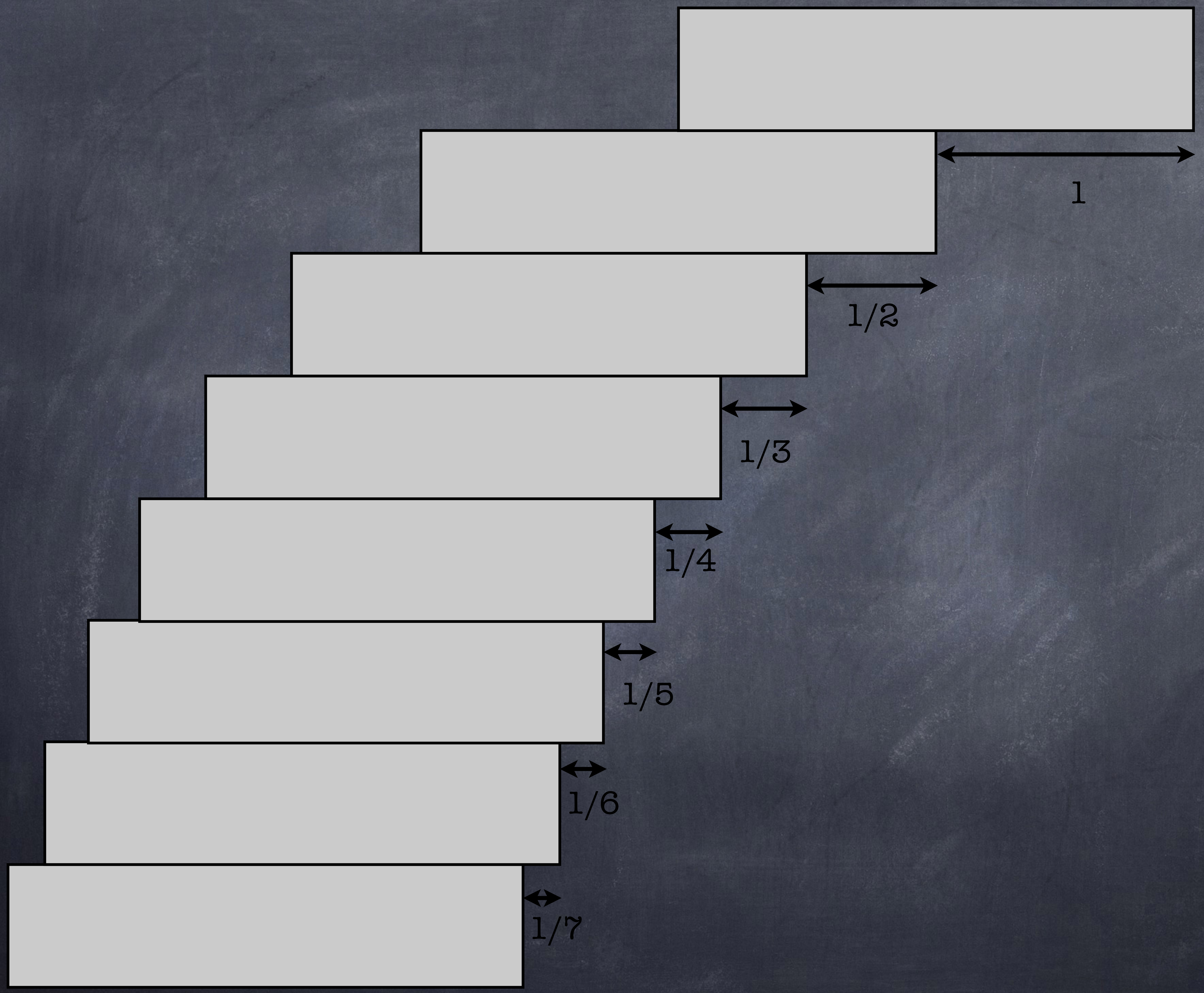
Redeneren



De vijfde rij ligt terug horizontaal!

Redeneren

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{1}{1}.$$


1
1/2
1/3
1/4
1/5
1/6
1/7

Redeneren

$$\frac{6}{\pi^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right)\left(1 - \frac{1}{11^2}\right)\cdots$$

(Euler)

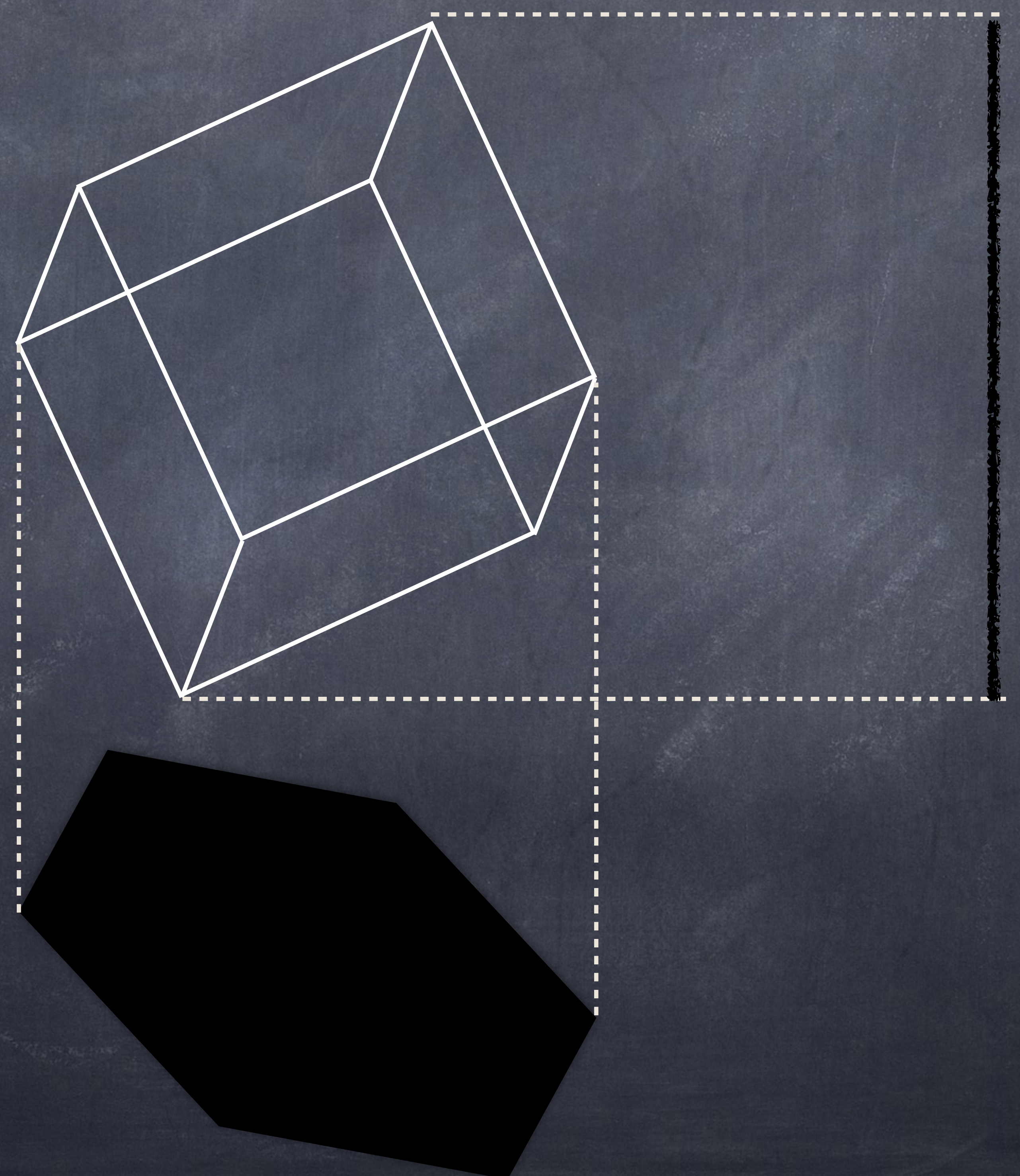
Redeneren

$$\frac{6}{\pi^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right)\left(1 - \frac{1}{11^2}\right)\cdots$$

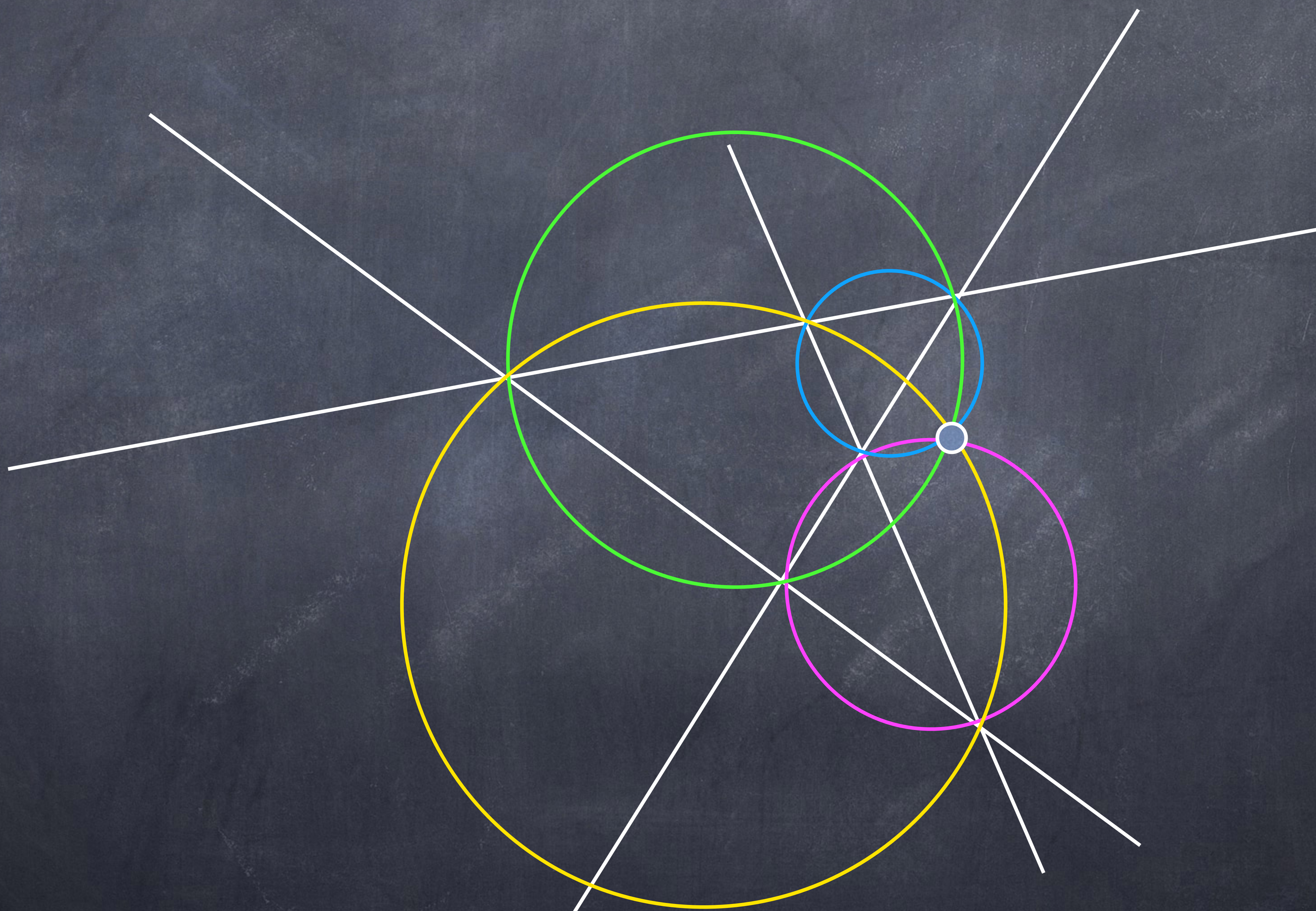
(Euler)

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

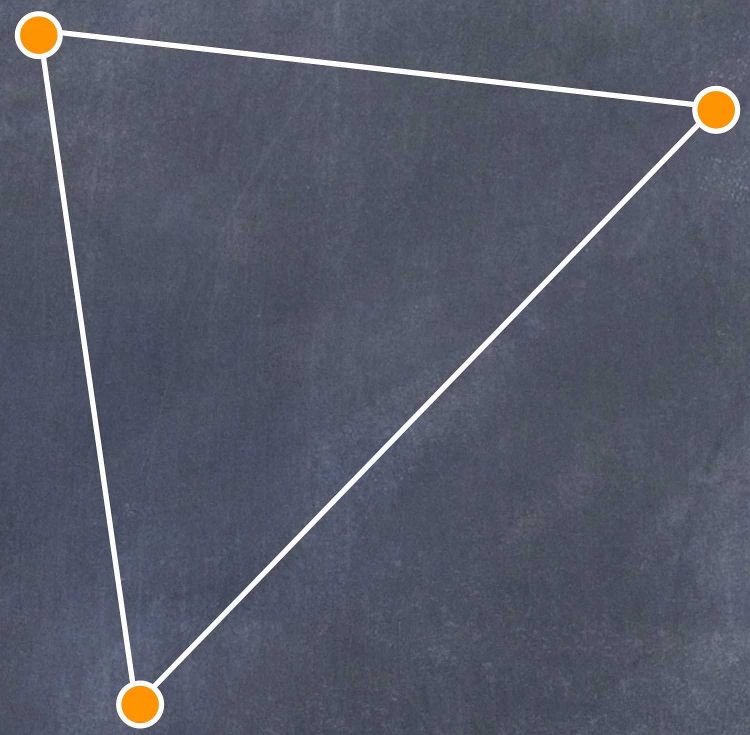
Redeneren



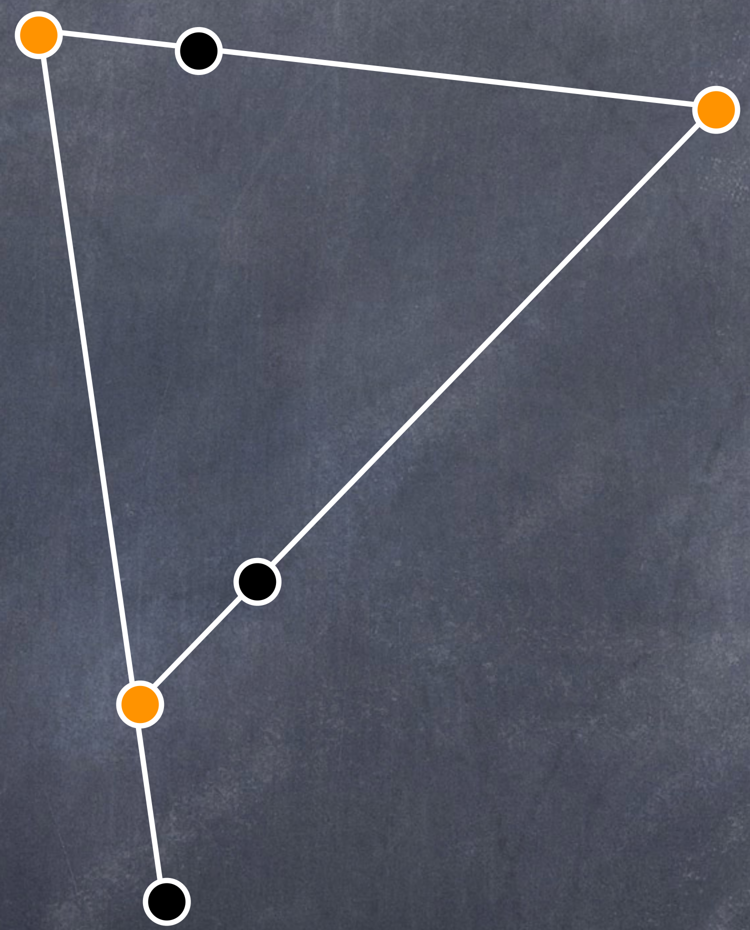
Redeneren



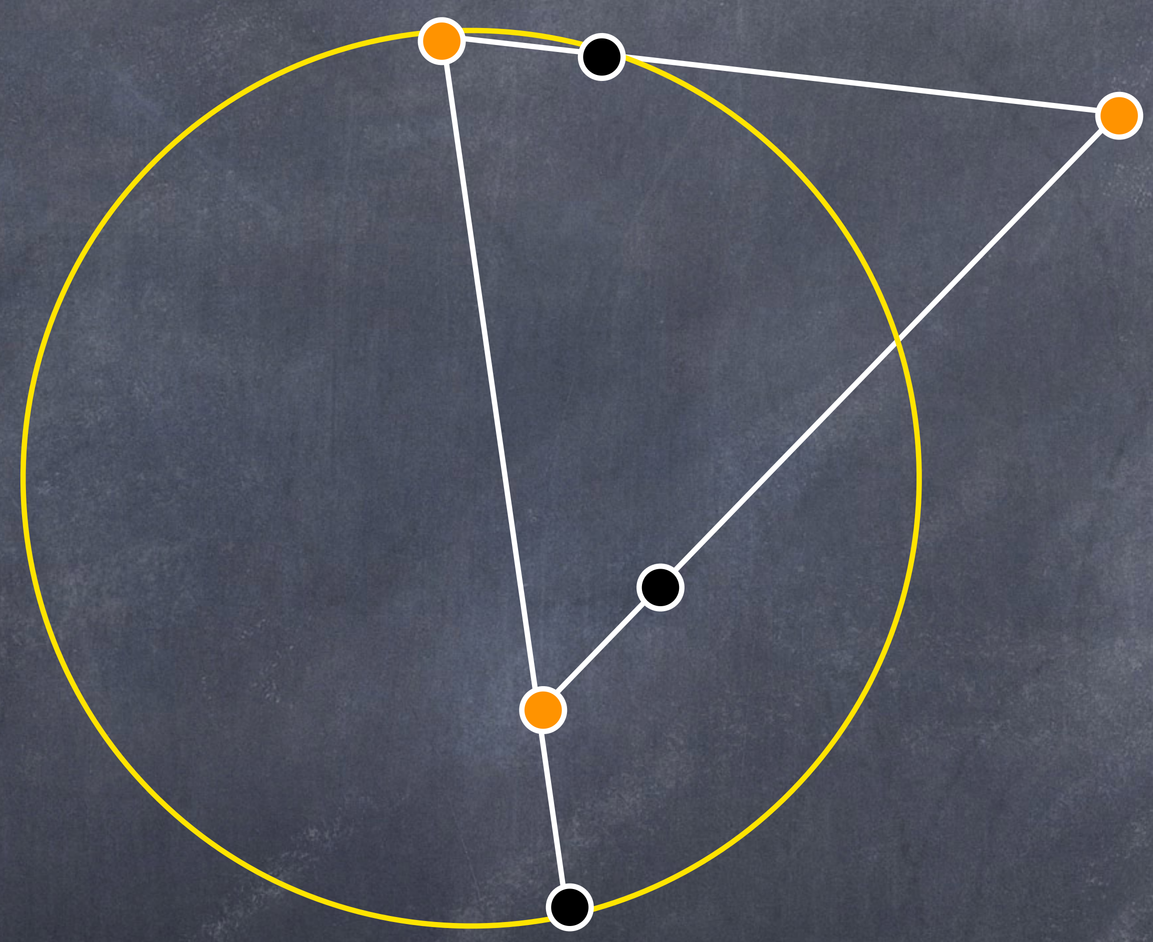
Redeneren



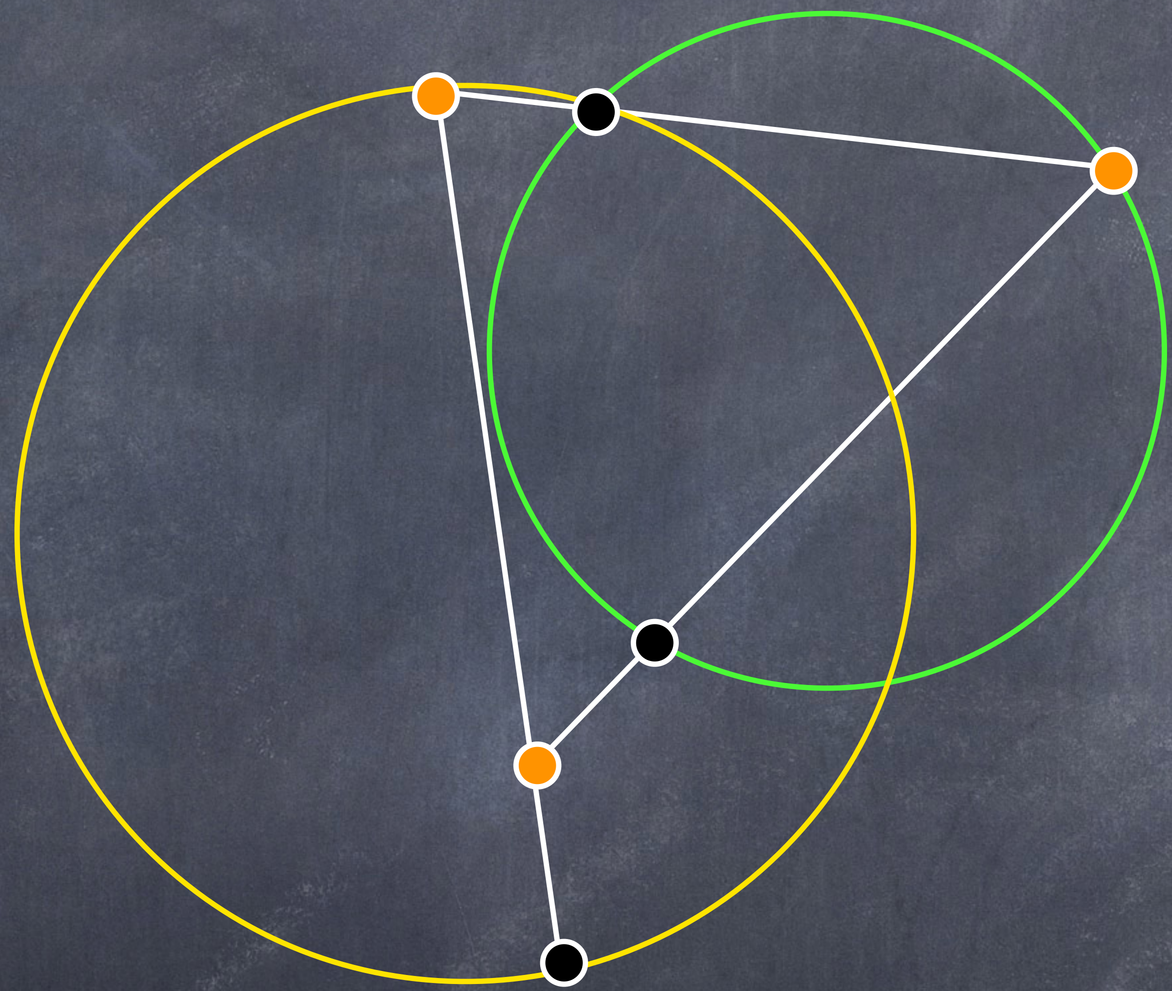
Redeneren



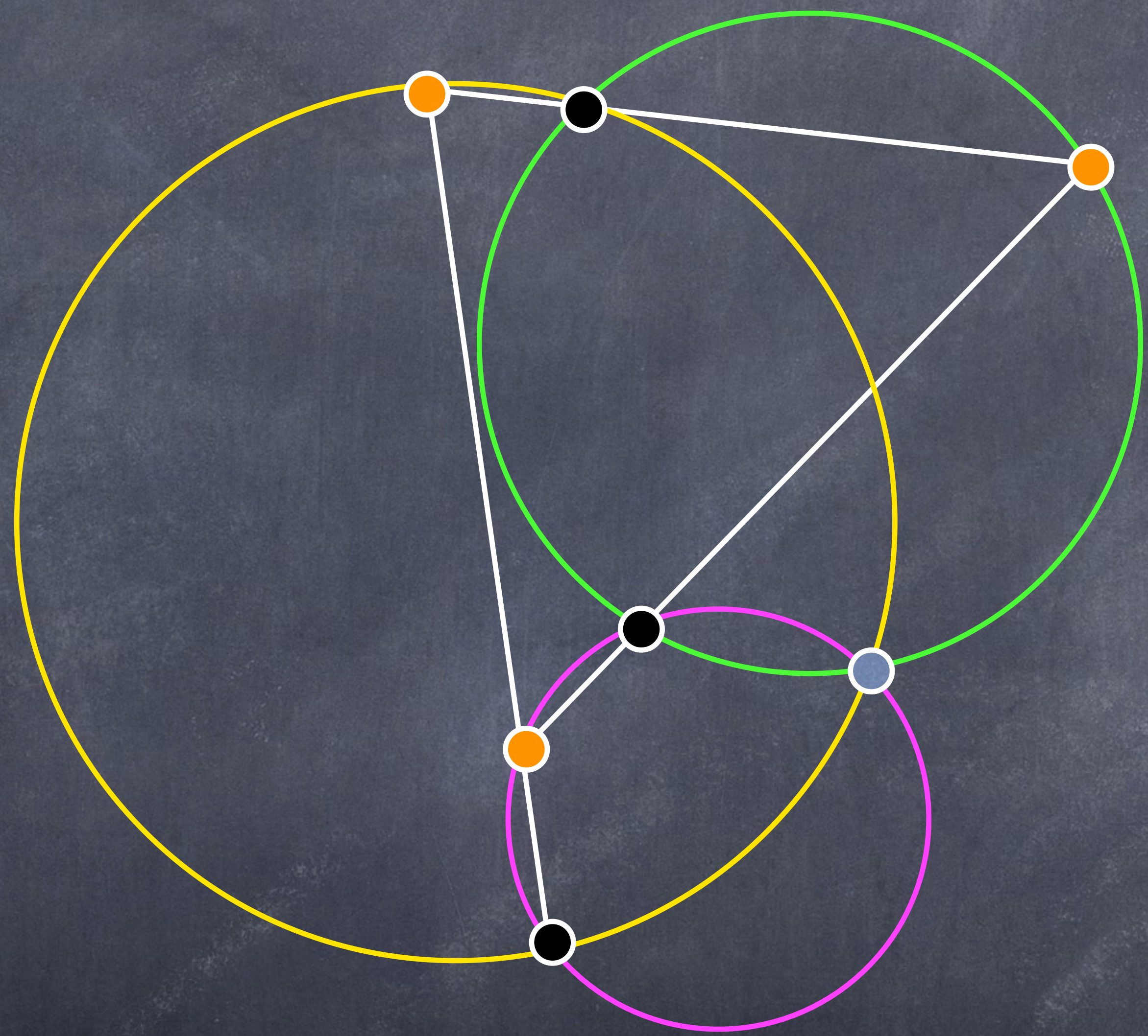
Redeneren



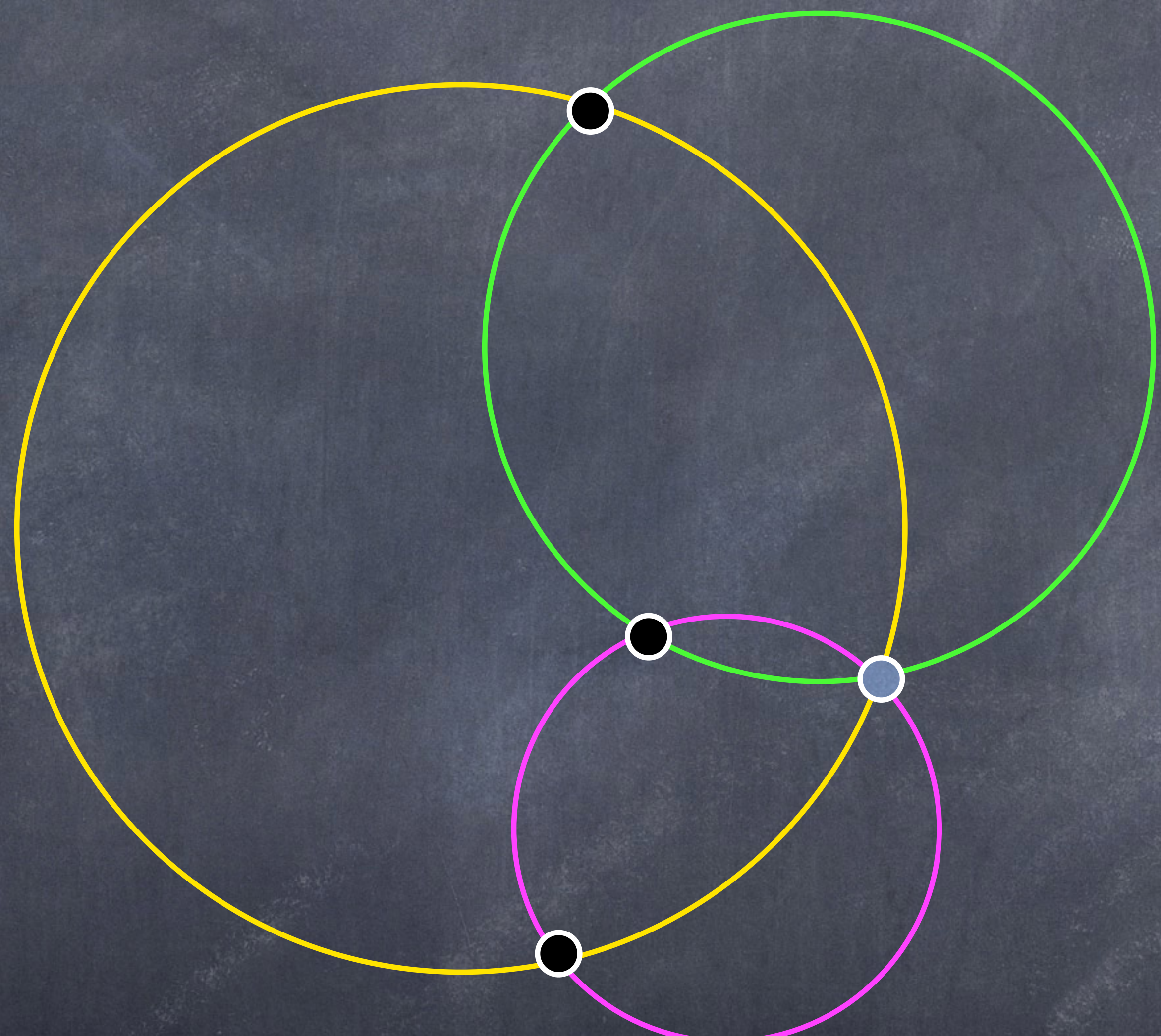
Redeneren



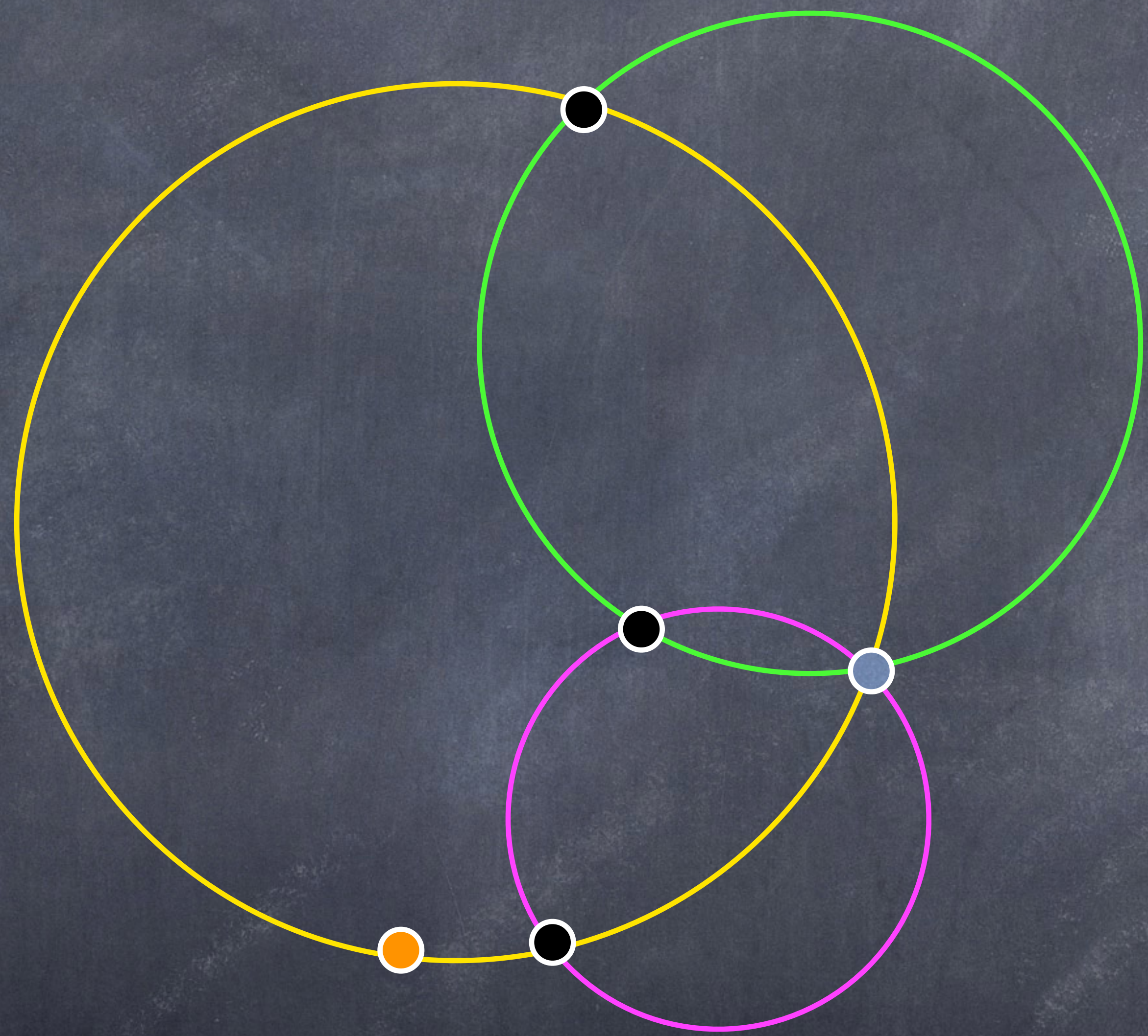
Redeneren



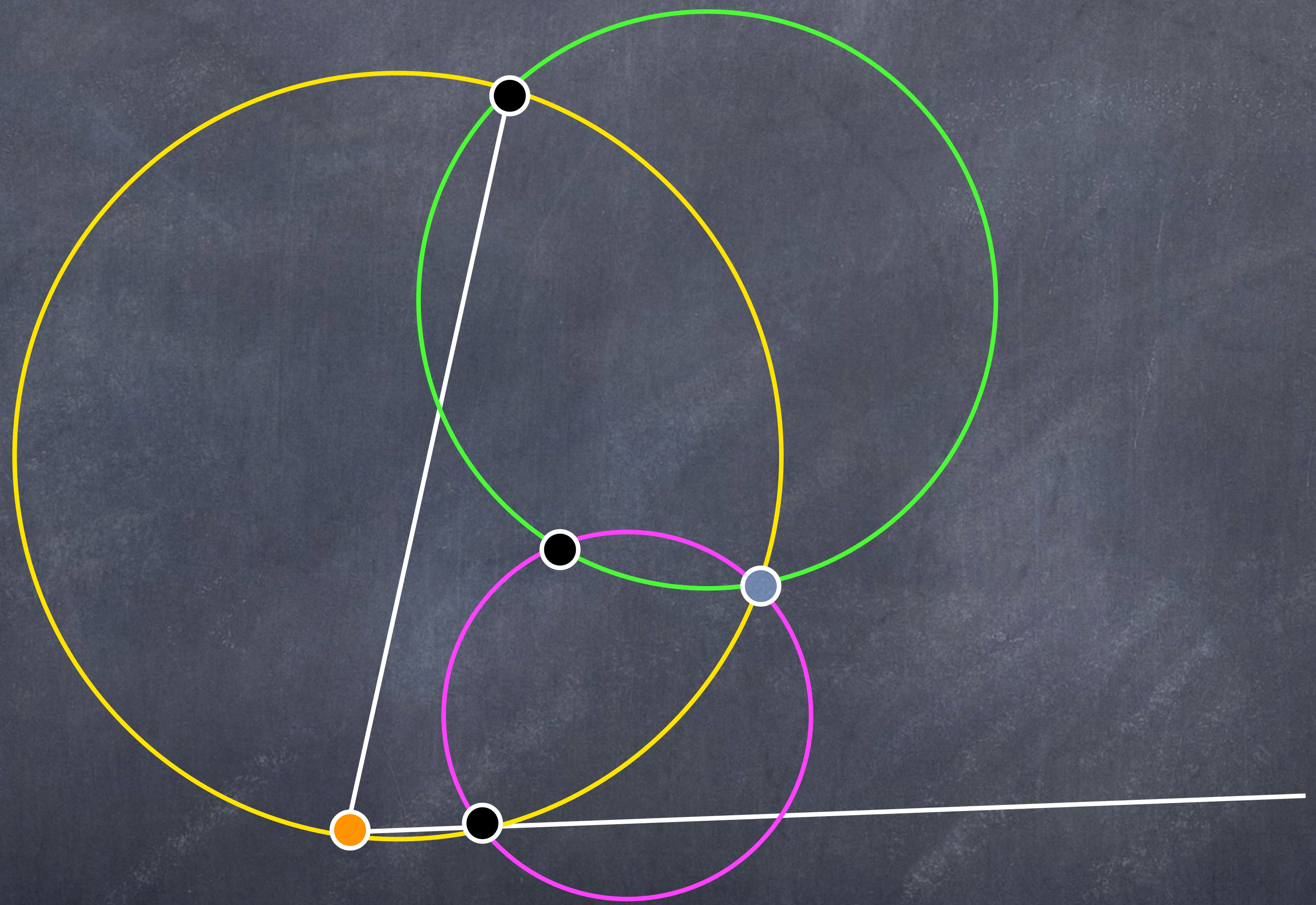
Redeneren



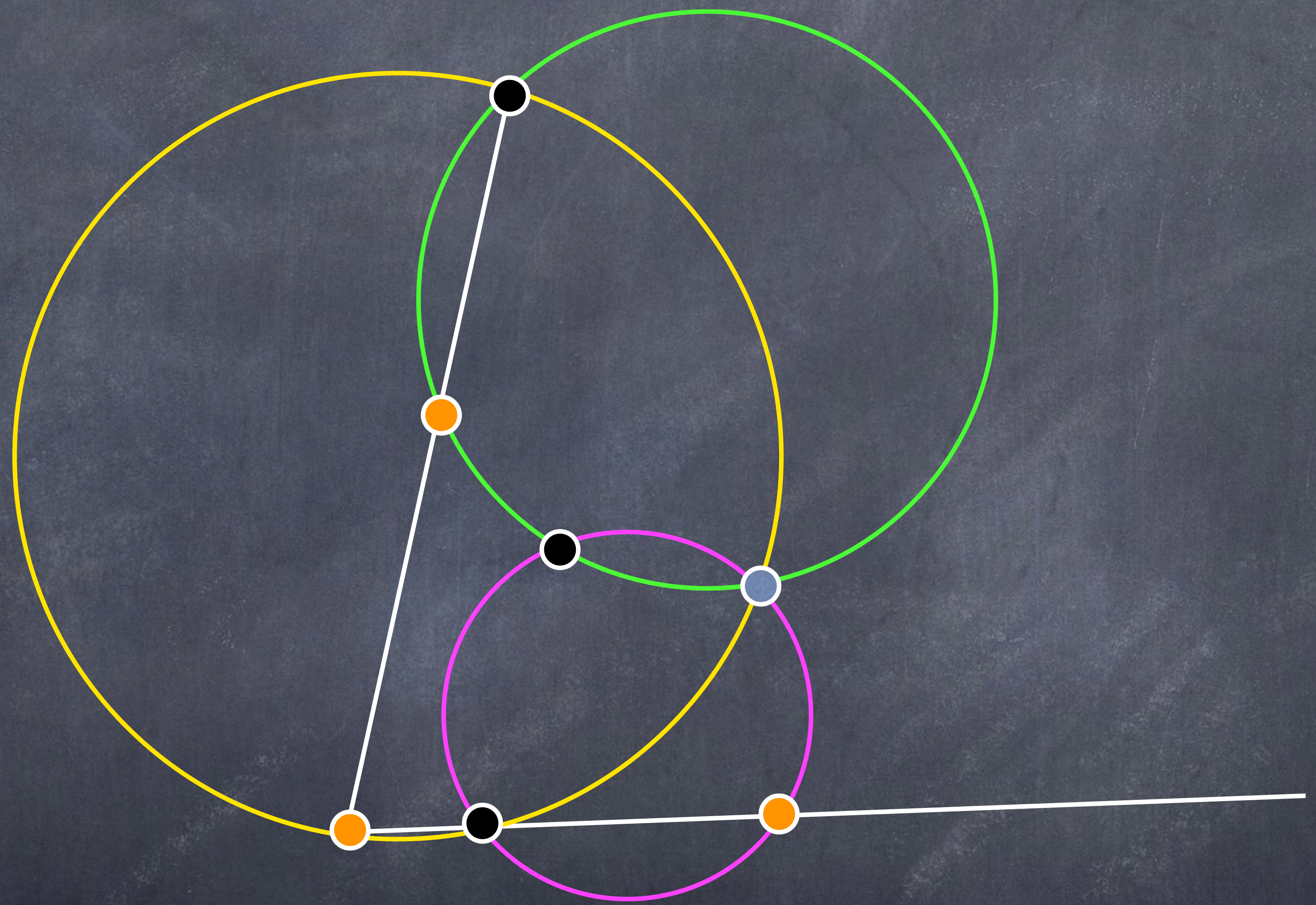
Redeneren



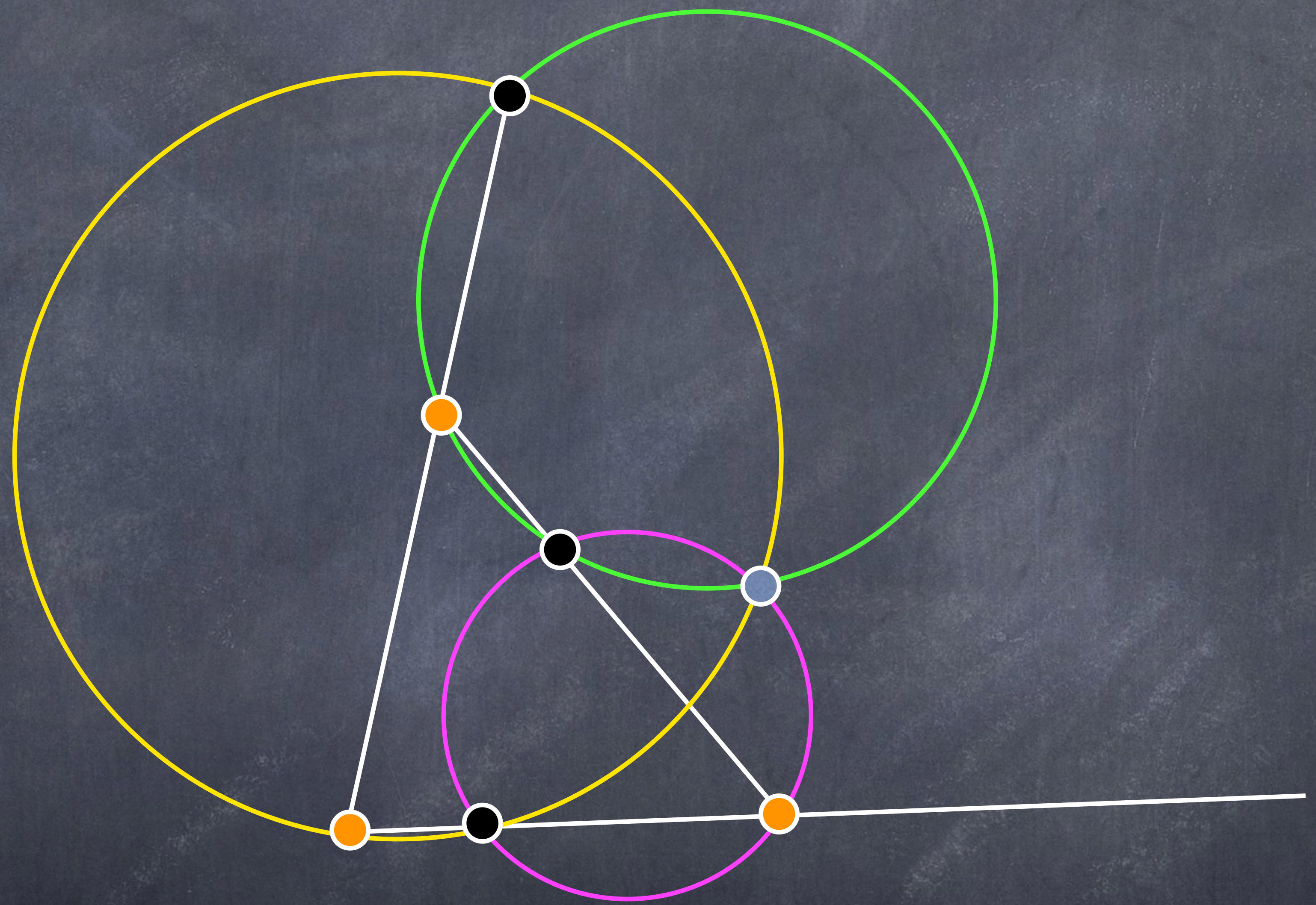
Redeneren



Redeneren



Redeneren



Redeneren

Bewijstechnieken

Voor "existentiële beweringen" $(\exists x)(p(x))$

* Constructief bewijs

"Er bestaat een irrationaal getal"

* Niet-constructief bewijs

"Er bestaan irrationale getallen x,y zó dat x^y rationaal is"

"Elke complexe veeltermvergelijking heeft een oplossing"

"Er bestaan oneindig veel priemgetallen"

"Er bestaan irrationale getallen x,y zó dat x^y rationaal is"

Neem $x = y = \sqrt{2}$

Is x^y rationaal, dan bewezen

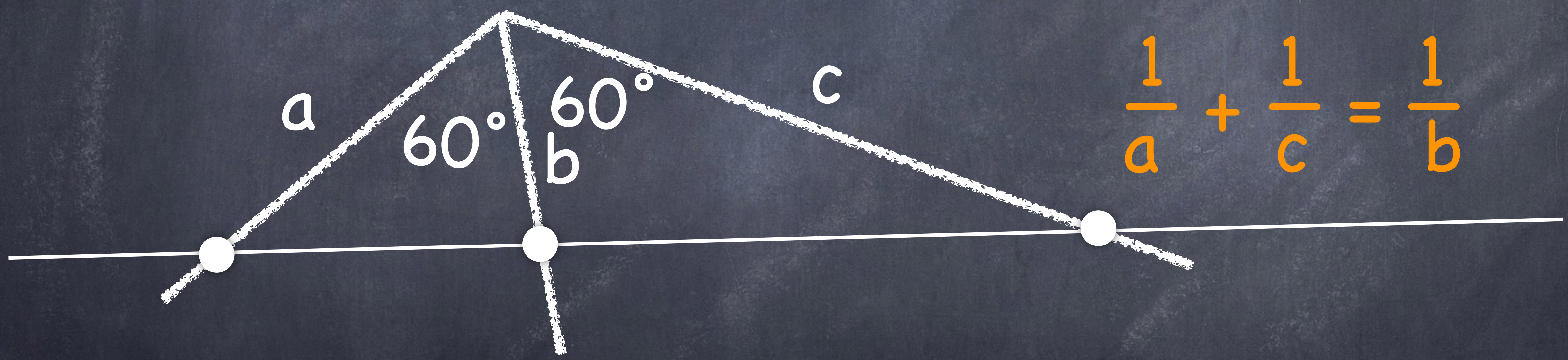
Indien niet, kies dan $x = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2}$

Dan is $x^y = 2$, rationaal

Redeneren

Bewijstechnieken

In meetkunde en combinatoriek



$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}$$

Combinatie algebra-meetkunde

Nieuwe Voorbeelden

Dit jaar in UniMath:

ONDERWEGRAADSEL 1

Op elk zijvlak van een kubus wordt een strikt positief natuurlijk getal geschreven. Op elk hoekpunt schrijft men het product van de drie getallen die op de aangrenzende zijvlakken staan. De som van al deze producten is precies 105. Wat is de som van alle getallen op de zijvlakken?

Hint: Schrijf die som als een product

$$(a+a')(b+b')(c+c')$$

Nieuwe Voorbeelden

Dit jaar in UniMath:

ONDERWEGRAADSEL 2

Voor een hoek θ strikt tussen 0^o en 180^o geldt $a.\sin\theta + b.\cos\theta = b$, waarbij a en b reële getallen zijn. Wat is dan de waarde (in functie van a en b) van $b.\sin\theta - a.\cos\theta$?

Nieuwe Voorbeelden

Eerste oplossing:

Stel $t = \tan\frac{\theta}{2}$, dan wordt het gegeven

$$\frac{2at}{1+t^2} + \frac{b(1-t^2)}{1+t^2)} = b,$$

equivalent met

$$2at + (b - bt^2) = b + bt^2,$$

en aangezien $t \neq 0$, wordt dit

$$a - bt = 0.$$

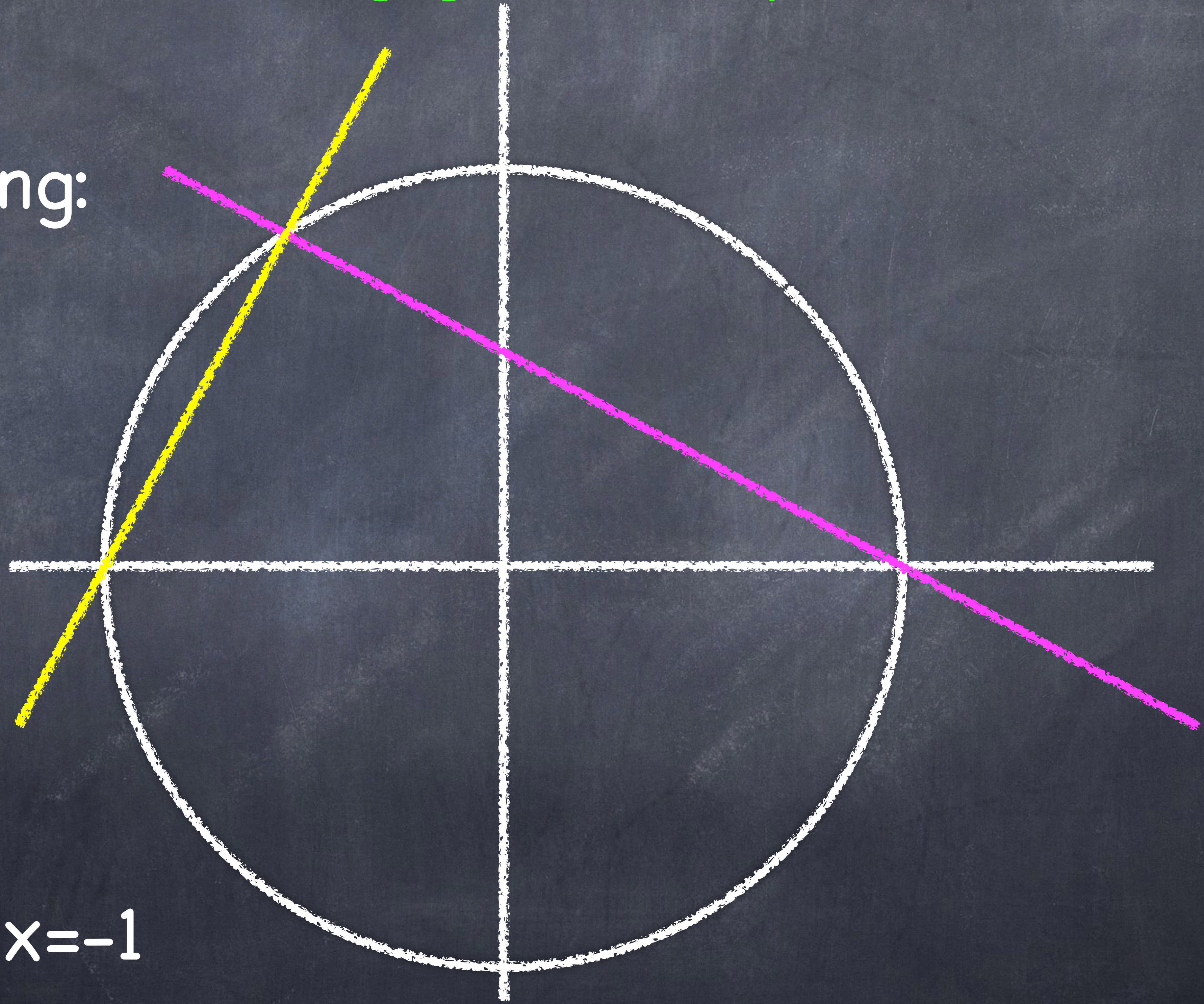
LL$= \frac{2bt}{(1+t^2} - \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} = \frac{2a-(a-at^2)}{1+t^2} = \frac{a+at^2}{1+t^2} = a.$

Nieuwe Voorbeelden

Tweede oplossing:

$ay+bx=b$

$x^2+y^2=1$



$by-ax=a$

Als $y=0$, dan $x=-1$

Nieuwe Voorbeelden

Twee opgaven
uit Wiskunde & Onderwijs 177

Stel dat a, b, c, d en e vijf gehele getallen zijn en dat a', b', c', d', e' diezelfde vijf gehele getallen zijn, maar eventueel in een andere volgorde. Is (a+a')(b+b')(c+c')(d+d')(e+e') even of oneven?

Stel dat a, b, c, d en e vijf gehele getallen zijn en dat a', b', c', d' en e' diezelfde vijf gehele getallen zijn, maar eventueel in een andere volgorde. Is

$$(a+a')\cdot(b+b')\cdot(c+c')\cdot(d+d')\cdot(e+e') \text{ even of oneven?}$$

Stel dat a, b, c, d en e vijf gehele getallen zijn en dat a', b', c', d', e' diezelfde vijf gehele getallen zijn, maar eventueel in een andere volgorde. Is (a+a')(b+b')(c+c')(d+d')(e+e') even of oneven?

Oplossing

Het product is altijd even. Stel immers dat het oneven is. Dan moet elk van de sommen $a+a'$, $b+b'$, $c+c'$, $d+d'$ en $e+e'$ oneven zijn. Als a even is, moet a' dus oneven zijn. Als a oneven is, moet a' dus even zijn. Hetzelfde geldt voor b en b', enzovoort. Dus als er k oneven getallen voorkomen in $\{a,b,c,d,e\}$, dan zullen er $5-k$ oneven getallen voorkomen in $\{a',b',c',d',e'\}$. Omdat $\{a,b,c,d,e\} = \{a',b',c',d',e'\}$, moet dus $k = 5-k$ en dus $2k = 5$. Dat is echter onmogelijk.

Stel dat a, b, c, d en e vijf gehele getallen zijn en dat a', b', c', d', e' diezelfde vijf gehele getallen zijn, maar eventueel in een andere volgorde. Is $(a+a')(b+b')(c+c')(d+d')(e+e')$ even of oneven?

Het product is altijd even. Stel immers dat het oneven is. Dan is elk van de sommen $a+a'$, $b+b'$, $c+c'$, $d+d'$ en $e+e'$ oneven. ~~Is a even, dan is dus a' oneven. Als a oneven is, dan is a' dus even. Hetzelfde geldt voor b en b', enzovoort. Dus als er k oneven getallen voorkomen in $\{a,b,c,d,e\}$, dan komen er $5-k$ oneven getallen voor in $\{a',b',c',d',e'\}$. Daar $\{a,b,c,d,e\} = \{a',b',c',d',e'\}$, is dus $k=5-k$ en dus $2k=5$. Dat is echter onmogelijk.~~

Stel dat a, b, c, d en e vijf gehele getallen zijn en dat a', b', c', d', e' diezelfde vijf gehele getallen zijn, maar eventueel in een andere volgorde. Is $(a+a')(b+b')(c+c')(d+d')(e+e')$ even of oneven?

Het product is altijd even. Stel immers dat het oneven is. Dan is elk van de sommen $a+a'$, $b+b'$, $c+c'$, $d+d'$ en $e+e'$ oneven, en bijgevolg ook de som $a+a'+b+b'+c+c'+d+d'+e+e'=a+b+c+d+e+a'+b'+c'+d'+e'= 2(a+b+c+d+e)$. Dat is echter onmogelijk.

Nieuwe Voorbeelden

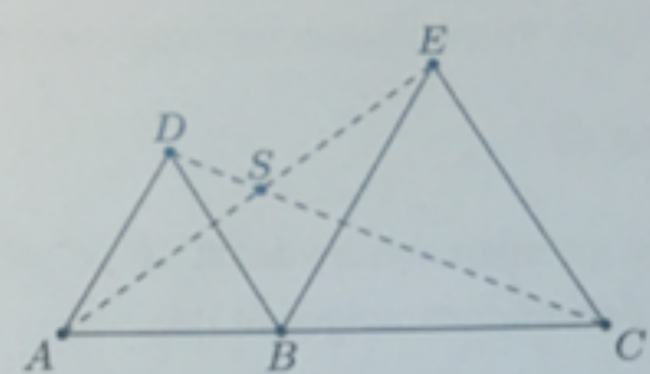
Tweede opgave uit Wiskunde & Onderwijs 177

Het punt B ligt op het lijnstuk [AC]. We kiezen een punt D zodat ∆ABD gelijkzijdige is. We kiezen een punt E zodat ∆BCE gelijkzijdig is en zodat D en E langs dezelfde kant van AC liggen. Bewijs dat de hoek waaronder de rechten AE en DC elkaar snijden onafhankelijk is van de ligging van B.

Het punt B ligt op het lijnstuk $[AC]$. We kiezen een punt D zodat $\triangle\ ABD$ een gelijkzijdige driehoek is. We kiezen een punt E zodat $\triangle\ BCE$ een gelijkzijdige driehoek is en zodat D en E langs dezelfde kant van AC liggen. Bewijs dat de hoek waaronder de rechten AE en DC elkaar snijden onafhankelijk is van de ligging van B.

Het punt B ligt op het lijnstuk [AC]. We kiezen een punt D zodat ΔABD gelijkzijdige is. We kiezen een punt E zodat ΔBCE gelijkzijdig is en zodat D en E langs dezelfde kant van AC liggen. Bewijs dat de hoek waaronder de rechten AE en DC elkaar snijden onafhankelijk is van de ligging van B.

Oplossing



We zullen bewijzen dat AE en DC elkaar snijden onder een hoek van 60°, ongeacht de ligging van B. We zien dat $A\hat{B}E = 180° - C\hat{B}E = 120°$. Op dezelfde manier zien we dat $D\hat{B}C = 120°$. Omdat $|AB| = |DB|$, $A\hat{B}E = D\hat{B}C$ en $|BE| = |BC|$, is $\triangle ABE \cong \triangle DBC$ wegens het congruentiekenmerk ZHZ. Daaruit volgt dat $E\hat{A}B = C\hat{D}B$. We vinden dan dat

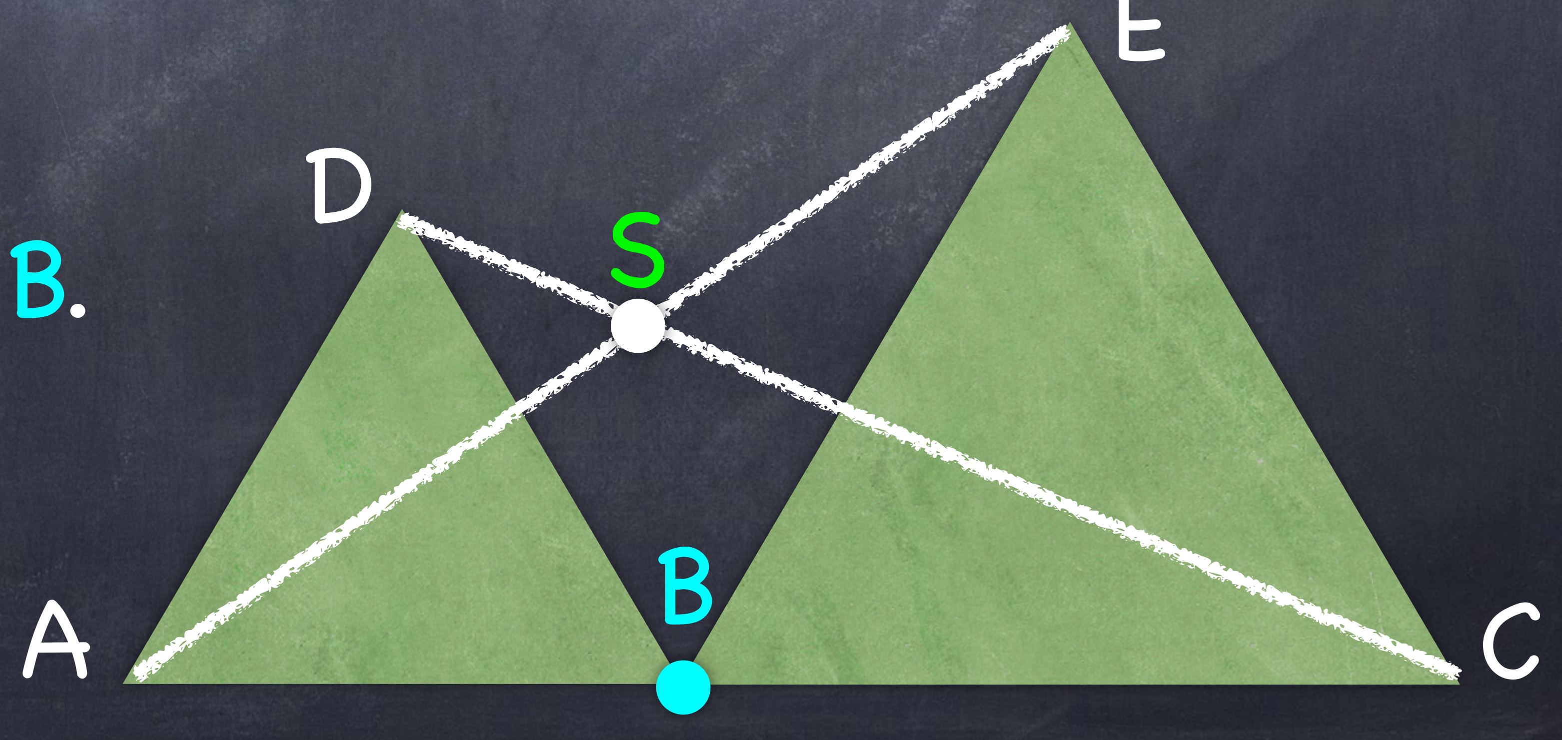
$$A\hat{S}D = 180° - S\hat{D}A - D\hat{A}S = 180° - \left(60° + C\hat{D}B\right) - D\hat{A}E$$

$$= 120° - E\hat{A}B - D\hat{A}E = 120° - 60° = 60°.$$

Het punt B ligt op het lijnstuk [AC]. We kiezen een punt D zodat ΔABD gelijkzijdige is. We kiezen een punt E zodat ΔBCE gelijkzijdig is en zodat D en E langs dezelfde kant van AC liggen. Bewijs dat de hoek waaronder de rechten AE en DC elkaar snijden onafhankelijk is van de ligging van B.

We zullen bewijzen dat AE en DC elkaar snijden onder een hoek van 60°, ongeacht de ligging van B.

Draai [CD] over 60° in positieve zin rond B.



Vraag op ikhebeenvraag.be van 7 oktober 2012:

7 golfspelers spelen 7 dagen in teams van 3 en 4. Hoe stel ik een schema op om dit zo evenredig mogelijk te doen?

Dag 1: Spelers 1-2-4 en 3-5-6-7
Dag 2: Spelers 2-3-5 en 4-6-7-1
Dag 3: Spelers 3-4-6 en 5-7-1-2
Dag 4: Spelers 4-5-7 en 6-1-2-3
Dag 5: Spelers 5-6-1 en 7-2-3-4
Dag 6: Spelers 6-7-2 en 1-3-4-5
Dag 7: Spelers 7-1-3 en 2-4-5-6

Vraag op ikhebeenvraag.be van 7 oktober 2012:

7 golfspelers spelen 7 dagen in teams van 3 en 4. Hoe stel ik een schema op om dit zo evenredig mogelijk te doen?

Speler 1: Dagen 1-2-4 en 3-5-6-7
Speler 2: Dagen 2-3-5 en 4-6-7-1
Speler 3: Dagen 3-4-6 en 5-7-1-2
Speler 4: Dagen 4-5-7 en 6-1-2-3
Speler 5: Dagen 5-6-1 en 7-2-3-4
Speler 6: Dagen 6-7-2 en 1-3-4-5
Speler 7: Dagen 7-1-3 en 2-4-5-6

Nog enkele uitsmijters:

Een regelmatige n-hoek is ingeschreven in een cirkel met straal r. Bewijs dat de som van de kwadraten van de afstanden van een punt op de cirkelrand tot de hoekpunten van de regelmatige n-hoek gelijk is aan $2nr^2$.

1. Gegeven een regelmatige n-hoek ingeschreven in de eenheidscirkel. Toon aan dat het product van de lengtes van alle zijdes en alle diagonalen gelijk is aan $\sqrt{n^n}$. Ga deze formule expliciet na voor $n = 3, 4, 5$.

2. Gebruik puntje (a) om volgende gelijkheid te bewijzen.

$$\sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdots \sin 90^\circ = \frac{\sqrt{90}}{2^{89}}$$

Toon aan dat, voor alle $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, geldt dat

$$\sin 2\alpha \geq (\tan \alpha)^{\cos 2\alpha}.$$

Nog enkele uitsmijters:

Gegeven de reële $n \times n$-matrix

$$\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

Bewijs dat deze matrix singulier is als en slechts als één van de volgende mogelijkheden zich voordoen.

1. Ten minste twee van de getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zijn gelijk aan 0.
2. Geen enkel van de getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ is 0 en

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} = -1.$$

Kan je ook de determinant berekenen van deze matrix?

Nog enkele uitsmijters:

Bereken

$$\int_0^1 (e^{x^2-1} - e^{x^2-2x})dx.$$

Bereken

$$\int \frac{\sin x}{e^x + \sin x + \cos x} dx.$$

Bereken

$$\int_0^1 \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 - x + 1}\, dx.$$

Als $\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, wat is dan $\cos^3\theta - \sin^3\theta$?

Algemene besluiten—wetmatigheden

* Mooie opgaven streven naar mooie bewijzen
* Hoe minder gegeven, hoe mooier het oogt
* Iets ogenschijnlijks moeilijk
* Korte bewijzen zijn mooier dan andere
* Moeilijk om echt lelijke opgaven te vinden
* Bewijzen maken neutrale opgaven soms mooi
* Onverwachte invalshoek maakt mooi
* Eén-oogopslag-bewijzen
* Gevallenonderzoeken vermijden
* Eigen smaak algebra vs meetkunde vs analyse

Dank voor uw aandacht