



Inhoud

1	Interface van GeoGebra SUITE	1
1.4	Inleiding	1
1.5	De menubalk	3
1.6	Het knoppenvenster	3
1.7	Het algebravenster	4
1.8	Het "slimme" invoerveld in GeoGebra Suite	5
1.9	Het tabelvenster	6
2	Dynamische meetkunde met GeoGebra Suite	7
2.1	De interface van GeoGebra meetkunde	7
2.1.1	Overzicht van de knoppen in het knoppenvenster.....	8
2.1.2	Een eenvoudige constructie met het knoppenvenster.....	9
2.2	Meten.....	10
2.2.1	Hoeken meten.....	10
2.2.2	Afstanden meten: de stelling van Viviani.....	12
2.2.3	Oppervlakte meten	13
2.2.4	Helling (rico) meten	13
2.3	Kegelsneden.....	14
2.3.1	Ellips, hyperbool en parabool	14
2.3.2	Ellips volgens de constructie van de tuinman.....	15
2.3.3	Superbiljart: de terugkaatsingswet voor een ellips.	17
2.4	Meetkundige plaats	19
2.4.1	Voorbeeld 1: Ladder tegen de muur	19
2.4.2	Voorbeeld 2: een strofoïde	20
2.5	Navigatiebalk en overzicht constructiestappen	21
2.5.1	Navigatiebalk: constructie raaklijnen uit punt aan cirkel	21
2.5.2	Overzicht constructiestappen: Vier rakende cirkels	22
2.6	Analytische meetkunde	25
2.6.1	Een vleugje geschiedenis... coördinatenmeetkunde	25
2.6.2	Ingeven van punten, rechten en cirkels in het algebravenster	25
2.6.3	Extra commando's voor meetkunde in het algebravenster	27
2.6.4	Een aantal extra commando's voor meetkunde.....	28
2.7	Cartesische vergelijkingen van rechten, cirkels en kegelsneden.....	30
2.7.1	Vergelijkingen van rechten ingeven.....	30
2.7.2	Vergelijkingen van cirkels ingeven	31
2.7.3	Vergelijkingen van kegelsneden.....	32
2.7.4	Krommen met impliciet voorschrift.....	34
3	Grafische voorstellingen	35
3.1	Smaakmaker: de functiemachine	35
3.2	Tekenen van de grafiek van een (reële) functie	36
3.2.1	Een eerstegraadsfunctie $f(x) = ax + b$	37
3.2.2	Een tweedegraadsfunctie $f(x) = ax^2 + bx + c$	38
3.2.3	Aanpassen van de grafiekgrenzen	38
3.2.4	Beperking van het domein van een functie	39
3.2.5	Stuksgewijs gedefinieerde functie	40





3.3	Verloop van de grafiek van een functie	41
3.3.1	Punt op een grafiek volgen	41
3.3.2	Nulwaarden van de grafiek van een functie	42
3.3.3	Snijpunten van 2 grafieken	43
3.4	Het commando <code>slowplot[]</code>	44
3.5	Speciale (niet algebraïsche) functies	45
3.5.1	Absolute waarde functie	45
3.5.2	De vloorfunctie en de ceilfunctie.....	45
3.5.3	De tekenfunctie $f(x) = \text{sign}(x)$	46
3.5.4	Voorbeeld van een speciale functie met perforatie en sprong:	46
3.6	Impliciete vergelijkingen (van een kromme)	47
3.7	Betekenis van parameters	48
3.8	Statische tekst.....	49
3.8.1	Statische tekst.....	49
3.8.2	Labels, naam en waarde, titel	50
3.8.3	Tekstcommando's: verticale en gedraaide tekst	51
3.8.4	Commando <code>TekstAlsBreuk()</code>	52
3.8.5	Label voorschrift van een functie als tekst	53
3.9	Dynamische tekst koppelen aan een meting.....	54
3.9.1	Dynamische formules in "gewone" tekst	54
3.9.2	Dynamische formules en LaTeX	55
3.9.3	Online LaTeX editors	56
3.10	LateX voor gevorderden met GeoGebra klassiek 5	57
3.10.1	Een uitgewerkt voorbeeld in GeoGebra klassiek 5	57
3.10.2	Formules met LaTeX in GeoGebra Klassiek 5.....	59
3.11	Voorwaardelijke tekst met GeoGebra 5 klassiek.....	61
4	RIJEN	65
4.1	Inleiding	65
4.1.1	Som van de eerste 100 natuurlijke getallen	65
4.1.2	Opstellen van de formule voor het n-de driehoeksgetal.....	65
4.1.3	Afspraken en definities	67
4.1.4	Een paar voorbeelden van rijen	67
4.1.5	Voorstellingswijzen van rijen	67
4.2	Rijen met GeoGebra	68
4.2.1	Expliciet voorschrift: het commando <code>rij ()</code>	68
4.2.2	Recursief voorschrift: commando's <code>iteratie()</code> en <code>iteratielijst()</code>	68
4.2.3	De rij van Fibonacci	70
4.2.4	Gemengde vorm (recursief en expliciet).....	71
4.3	Nog enkele nuttige GeoGebra commando's voor rijen	72
4.3.1	Termen van een rij als breuk weergeven.....	73
4.4	Rekenkundige rijen	74
4.4.1	Expliciet voorschrift RR	74
4.4.2	Recursief voorschrift RR.....	75
4.5	Meetkundige rijen.....	76
4.5.1	Expliciet voorschrift MR	76
4.5.2	Recursief voorschrift MR.....	76
4.6	(Eindige) som van de termen van een (RR of MR) rij.....	77





4.6.1	Eindige som RR.....	77
4.6.2	Eindige som MR.....	77
4.7	Convergente en divergente rijen.....	78
4.7.1	Voorbeeld.....	78
4.7.2	Grafisch onderzoek convergentie en divergentie van een rij.....	79
4.7.3	Rekenkundige en meetkundige rijen.....	80
4.8	Onderzoeksopdracht veelhoeksgetallen.....	80
4.9	Webgrafiek.....	83
4.10	Webgrafieken voor meetkundige rijen.....	84
4.11	Financiële toepassingen.....	86
4.11.1	Enkelvoudige intrest.....	86
4.11.2	Samengestelde intrest.....	87
4.12	Methode van Heron.....	89
5	Algebraïsche functies.....	90
5.1	Inleiding.....	90
5.1.1	Even- en oneven functies.....	90
5.1.2	Domein en bereik van een reële functie.....	91
5.2	Veeltermfuncties.....	92
5.2.1	Eerstegraadsfuncties (en het gebruik van schuifknoppen).....	92
5.2.2	Tweedegraadsfunctie $f(x)=a.(x-p)^2+q$ (en het gebruik van Als[])....	94
5.2.3	Veeltermfuncties van een hogere graad dan 2.....	96
5.2.4	Nog een paar nuttige commando's i.v.m. veeltermfuncties.....	98
5.3	Rationale functies.....	100
5.4	Irrationale functies.....	101
5.5	Aanvinkvakje en Booleaanse operatoren.....	102
5.7	GeoGebra commando's voor het bepalen van nulwaarden.....	104
5.7.1	Voorafgaande opmerkingen.....	104
5.7.2	Commando's voor het bapalen van nulwaarden in GeoGebra Klassiek 6 en Suite.....	104
5.8	Aantal nulwaarden van een veeltermfuncties van de n-de graad.....	106
5.8.1	Functies van de eerste graad (rechte): $f(x) = a.x + b$	106
5.8.2	Functies van de tweede graad (parabool).....	107
5.8.3	Algemeen geval.....	108
5.8.4	MAXIMAAL aantal nulwaarden van een veeltermfunctie van graad n.....	110
5.9	Een algebraïsche eigenaardigheid !.....	113
5.10	Transformatie van de standaardhyperbool.....	118
5.11	Studie van de homografische functie.....	120
5.11.1	Parameters van een homografische functie.....	120
5.11.2	Oefeningen algemene formules voor homografische functie.....	121
5.11.3	Besluit: algemene omzettingsformules.....	123
5.11	Vraagstukken rationale functies.....	124
5.11.1	Oefening 1: driehoek en rechthoek.....	124
	124	
5.11.2	Oefening 2: kostprijs van een advertentie.....	128
	128	
5.11.3	Oefening 3: ladder tegen gebouw.....	129
5.11.4	OPLOSSINGEN.....	130





5.12	OPLOSSINGEN	131
6	Grafieken van exponentiële en logaritmische functies.....	132
6.1	Opgave 1: exponentiële functie met grondtal a	132
6.2	Opgave 2: Lineair, kwadratisch of exponentieel !	134
6.3	Opgave 3: logaritmische functies met grondtal a	135
6.4	Opgave 4: Verband tussen exponentiële en logaritmische functies	137
6.5	Oefeningen	138
6.4	Verbetersleutel opgave 1: exponentiële functie met grondtal a	139
6.5	139	
6.6	Verbetersleutel opgave 2: Lineair, kwadratisch of exponentieel !.....	139
6.7	Verbetersleutel opgave 3: logaritmische functies met grondtal a	140
6.8	Verbetersleutel opgave 4: Verband tussen exponentiële en logaritmische functies 141	
6.9	Oefeningen	141
6	Transformaties van grafieken exponentiële en logaritmische functies	142
6.9	Herhaling: verschuiving van grafiek veeltermfunctie	142
6.10	Tekenverandering in het voorschrift van f	144
6.11	Algemene invloed van parameters.....	147
6.11.1	Betekenis van s.....	147
6.11.2	Betekenis van r.....	147
6.11.3	Betekenis van b	148
6.11.4	Betekenis van c	148
6.12	Samenvatting	149
6.13	Verbetersleutels transformaties exponentiële en logaritmische functies ..	150
6.13.1	Herhaling: verschuiving van grafiek veeltermfunctie	150
6.13.2	Tekenverandering in het voorschrift van f.....	151
6.13.3	Betekenis van de parameters s,r,b,c.....	152
7	Inleiding goniometrische functies	153
7.1	De radiaal als hoekeenheid.....	153
7.2	De goniometrische getallen.....	154
7.3	Herhaling formules verwante hoeken	155
7.3.1	Supplementaire hoeken.....	155
7.3.2	Complementaire hoeken	156
7.3.3	Tegengestelde hoeken	157
7.3.4	Anti-supplementaire (diametraal tegenovergestelde) hoeken	158
7.4	De goniometrische functies	159
7.4.1	De sinusfunctie.....	159
7.4.2	De cosinusfunctie	160
7.4.3	De tangensfunctie	161
7.5	Opmerkingen: slowplot en animatie	162
OPMERKING 1	162
OPMERKING 2	162
7.6	Creëren van een animatie van de sinusfunctie met GeoGebra.....	163
7	De algemene sinusfunctie $f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$.....	164





7.7	Herhaling: de sinusfunctie $y = \sin(x)$	164
	164	
7.8	De algemene sinusfunctie.....	165
	Studie van de invloed van a, b, c en d voor $f(x)=a.\sin[b(x-c)] + d$ met $a > 0$ en ook $b > 0$	165
7.8.1	$f(x) = a.\sin(x)$ met $a > 0$ Verticale vervorming van $\sin(x)$	165
7.8.2	$f(x) = \sin(b.x)$ met $b > 0$ Horizontale vervorming van $\sin(x)$	166
7.8.3	$f(x) = \sin(x - c)$ Horizontale verschuiving.....	167
7.8.4	$f(x) = \sin(x) + d$ Verticale verschuiving.....	168
7.8.5	Algemene sinusfunctie $y = a.\sin[b.(x - c)]+ d$ met $a > 0$ en $b > 0$	169
7.8.6	Samenvatting	171
8	Afgeleiden	172
8.1	Inleidende begrippen en definities	172
8.1.1	Het begrip helling.....	172
8.1.2	Limietdefinitie van de afgeleide van f in a	174
8.2	Afleidbaarheid in een punt	176
8.2.1	Inleiding: betekenis afgeleide in wiskunde en fysica	176
8.2.2	Afleidbaar in een punt (of niet?).....	177
8.3	Afgeleide functie van een functie	179
8.3.1	Inleidend voorbeeld: helling raaklijn in verschillende punten.....	179
8.3.2	Afgeleide functies van standaardfuncties.....	180
8.3.3	Inleidend voorbeeld: helling raaklijn in verschillende punten.....	181
8.3.4	Afgeleide functies van standaardfuncties.....	182
8	Betekenis teken van de afgeleide functie	183
8.4	Betekenis van het teken van de afgeleide functie.....	183
8.4.1	Herhaling: stijgen en dalen van een eerste- en tweedegraadsfunctie.....	183
8.4.2	Veeltermfuncties met graad groter dan 2	188
8.5	Onderzoek afleidbaarheid van speciale functies.....	193
8.5.1	Voorbeeld 7: $f(x) = 3x^2$ (grafiek met keerpunt)	193
8.5.2	Voorbeeld 8: $f(x) = x^2 - 9$ (grafiek met knikpunten)	195
8.5.3	Voorbeeld 9: $f(x) = 1x^2$	197
8.5.4	EXTRA voorbeelden.....	198
8.6	Betekenis tweede afgeleide functie	199
8.6.1	Herhaling: dalparabool of bergparabool.....	199
8.6.2	Verband kromming parabool en het teken van de tweede afgeleide.....	200
8.6.3	Kromming van een bergparabool en het teken van de tweede afgeleide	201
8.6.4	Veeltermfunctie van de derde graad en betekenis teken van de tweede afgeleide van f.....	202
8.6.5	Oefening op het herkennen grafiek van f, f' en f''	204
8.6.6	Herhalingsoefeningen: bespreking van de grafiek van veeltermfuncties	205
8	Stelling van Rolle en Lagrange.....	210
8.7	De stelling van Rolle.....	210
8.7.1	Inleiding.....	210
8.7.2	Uitgewerkte oefening en berekeningen	211
8.8	De middelwaardestelling van Lagrange.....	212





8.8.1	Inleiding.....	212
8.8.2	Uitgewerkte oefening	213
8.8.3	Illustratie middelwaardestelling Lagrange algemeen	215
9	Integraalrekening	216
9.1	Inleiding	216
9.1.1	Oppervlakte van veelhoeken	216
9.1.2	De oppervlakte van een parabolosegment.....	216
9.1.3	Een eenvoudig contextprobleem: de afgelegde weg in de fysica....	217
9.2	Het begrip georiënteerde oppervlakte	218
9.2.1	Het badwaterprobleem.....	218
	Voorbeeld 1	218
	Voorbeeld 2	220
9.2.2	Voorbeeld 3: beweging van een voorwerp	221
9.2.3	De oppervlaktefunctie	222
9.3	Ondersommen en bovensommen	223
9.4	Definitie van de bepaalde integraal.....	226
9.5	Meetkundige betekenis van de bepaalde integraal	228
	229	
9	Integraalrekening deel 2.....	230
9.6	De integraalfunctie (oppervlaktefunctie)	230
9.6.1	De integraalfunctie met $a = 0$	230
9.6.2	De integraalfunctie met ondergrens $a \neq 0$	233
9.7	De middelwaardestelling van de integraalrekening	234
	Als de functie f continu is in $[a,b]$, dan bestaat er een getal $c \in [a,b]$:	234
	$S = \int_a^b f(x) dx = b - a \cdot f(c)$	234
9.8	Hoofdstelling van de integraalrekening, primitieve functie, (on)bepaalde integraal	235
	235	
9.8.1	Hoofdstelling van de integraalrekening.....	235
	Als de functie f continu is in $[a,b]$, dan geldt in $[a,b]$:	235
	$\int_a^b ax = axft. dt' = f(x)$	235
9.8.2	Primitieve functie	236
9.8.3	De onbepaalde integraal	237
	237	
9.8.4	De bepaalde integraal	238
9.9	Oppervlakteberekening met integralen	239
9.9.1	Geval 1: oppervlakte is gelegen boven de X-as.....	239
9.9.2	Geval 2: oppervlakte gelegen onder de X-as	239
9.9.3	Geval 3: de gevraagde oppervlakte is gedeeltelijk gelegen boven en ook onder de X-as	240
9.9.4	Oppervlakte gelegen tussen twee krommen.....	241
9.10	Andere toepassingen	242
9.10.1	Tekenen van omwentelingslichamen	242
9.10.2	Inhoud van omwentelingslichamen.....	244
10	Mathematiseren met extremumproblemen	246
10.1	Oefening 1.....	246
10.2	Oefening 2.....	246





10.3	Oefening 3.....	247
10.4	Oefening 4.....	247
10.5	Oefening 5.....	248
10.6	Oefening 6.....	248
10.7	Uitgewerkte oplossingen extremumproblemen.....	249

